

Методы и модели в экономике

Обобщенная формула Д.С. Львова для машин, подвергающихся деградации

С.А. Смоляк¹

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение «Центральный экономико-математический институт РАН», Москва, Россия

Аннотация. При стоимостной оценке машин и оборудования иногда применяют формулу Львова. Она связывает стоимость оцениваемой машины со стоимостью ее аналога, учитывая при этом различия в производительности, операционных затратах и сроках службы этих машин. Однако в этой формуле принимается, что ни производительность, ни операционные затраты обеих машин на протяжении всего срока их службы не меняются. Мы предлагаем обобщение этой формулы на более реалистичную ситуацию, когда использование машин описывается случайным процессом деградации.

Ключевые слова: машина, оборудование, деградация, случайный процесс, стоимостная оценка, срок службы, рыночная стоимость, дисконтирование денежных потоков.

DOI: 10.14357/20790279200301

Введение

Эта статья посвящена одной из задач стоимостной оценки машин и оборудования (далее – машин). Нам будет удобно подразделять все машины на виды, а каждый вид – на марки (модели, модификации). Машины одной марки мы делим на новые и подержанные (использовавшиеся по назначению в течение некоторого времени). К одному виду мы относим машины одного назначения, производящие один и тот же продукт (работу или услугу). К одной марке мы относим машины, имеющие перед вводом в эксплуатацию одинаковые технические и операционные характеристики. Машины являются массовым товаром, и поэтому все новые машины одной марки являются точными копиями друг друга. Однако все подержанные машины одной марки – разные.

Под стоимостью машины на дату оценки оценщики понимают цену, по которой машина могла бы быть продана на эту дату при определенных «разумных» требованиях к условиям соответствующей сделки. Перечень таких требований задается стандартами оценки и национальным законода-

тельством [1;2, статья 3], и мы не будем подробно на них останавливаться. Укажем лишь, что в такой сделке продавец и покупатель должны вести себя экономически рационально и быть независимыми.

Чаще всего стоимость машины оценивается с помощью сравнительного подхода по данным о ценах ее аналогов, обращающихся на рынке. Рассмотрим, к примеру, три возможных ситуации.

1. Оценивается новая машина определенной марки. На дату оценки такие же машины продаются на рынке. Поскольку условия реальных сделок по продаже таких машин могут не удовлетворять требованиям стандартов оценки, цены этих сделок могут отличаться от стоимости. В теории стоимостной оценки эти отклонения рассматриваются как случайные величины. Поэтому обычно стоимость новой машины оценщики определяют как среднюю цену продажи таких машин.
2. Оценивается подержанная машина определенной марки. Здесь в качестве аналога удобно принять новую машину этой марки. Поэтому, чтобы оценить стоимость подержанной маши-

ны, вначале оценивают стоимость новой машины той же марки, а затем корректируют эту стоимость, учитывая, что она находится в ином техническом состоянии. Методы такой корректировки подробно осуждаются, например, в [3;4;5].

3. Оценивается новая машина определенной марки. На дату оценки такие же машины на рынке по какой-то причине не обращаются. В этом случае в качестве аналогов принимаются новые машины того же вида других марок, представленные на рынке. Однако, поскольку они имеют другие технико-экономические характеристики, их стоимости корректируются с учетом соответствующих различий. Типичные методы, применяемые для учета различий в технических характеристиках машин, описаны в [3;4;5] и др.

Нас будет интересовать последняя из указанных ситуаций, когда оцениваемая машина и ее аналог различаются по трем характеристикам: производительности, операционным затратам и сроку службы. В этом случае для оценки машин используют формулу Львова. Однако в «традиционном» виде эта формула предполагает неизменность технических характеристик машины на протяжении всего срока ее службы. В настоящей статье мы предлагаем обобщение формулы Львова, учитывающее вероятностный характер процесса использования машины.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 излагается ряд основных положений стоимостной оценки активов и дается вывод формулы Львова для «традиционной» ситуации. В разделе 3 обсуждаются проблемы моделирования деградации машин и оценки среднего срока их службы. В разделах 4 и 5 мы описываем случайный процесс использования машины и выводим уравнения для определения стоимости и среднего срока службы машины. Полученные результаты используются в разделе 6 для получения обобщенной формулы Львова. Там же приводится и пример ее использования. Необходимые ссылки на литературу по отдельным аспектам рассматриваемой задачи приводятся по ходу изложения материала.

1. Формула Львова

Как уже говорилось, стоимость новой машины на дату оценки обычно оценивают по данным о рыночных ценах машин той же марки на ту же дату. Сложности возникают, когда новая машина этой марки на дату оценки на рынке по каким-то причинам не представлена. Чтобы оценить ее, вначале выбирают обращающийся на рынке аналог

(новую машину другой марки того же назначения), затем оценивают его стоимость и корректируют ее с учетом различий в операционных характеристиках обеих машин. Один из методов такого типа основан на формуле Д.С. Львова (в [3;4] и других публикациях он именуется методом равноэффективного аналога).

Рассмотрим машину, предназначенную для производства некоторого продукта (им может быть работа или услуга). Такой продукт нужен участникам рынка, обладает полезностью для них и потому имеет определенную (рыночную) стоимость. Обозначим стоимость единицы этого продукта через p . Если такой продукт обращается на рынке, то величину p можно оценить по данным рыночных сделок. Однако обычно машина производит промежуточные технологические операции в едином технологическом процессе. Тогда прямое измерение стоимости производимого машиной продукта оказывается невозможным. На эту ситуацию и ориентирована формула Львова.

Под (чистыми доналоговыми) выгодами от использования машины в некотором периоде будем понимать стоимость производимого ею в этом периоде продукта за вычетом операционных затрат (без амортизации и налогов). Так определенные выгоды отражают стоимость права пользования машины в соответствующем периоде или ее рыночную арендную стоимость, а в терминологии Л.В. Канторовича, принятой в теории оптимального планирования — прокатную оценку машины [6, с. 102; 7, с. 38]. Для машин, производящих обращающийся на рынке продукт, выгоды практически совпадают по содержанию и величине с чистым доходом или EBITDA (прибылью до начисления амортизации и уплаты налогов). Так определяемый показатель выгод может рассматриваться и как (доналоговый) денежный поток, связанный с использованием машины в соответствующем периоде, упоминаемый в стандартах оценки [1].

Далее мы рассматриваем процесс использования машины в непрерывном времени, предполагая отсутствие инфляции. Здесь машину удобно характеризовать интенсивностью приносимых выгод (ИБ), т.е. размером выгод, приносимых в малую единицу времени.

Согласно стандартам оценки, стоимость актива определяется потоком приносимых им выгод. Соответствующая зависимость устанавливается с помощью принципа ожидания выгод. Он упоминается в стандартах оценки [1] в числе основных принципов, а его суть раскрывается в ряде положений стандарта, описывающих методы оценки. Тем не менее, конкретной формулировки принципа,

ориентированной на оценку в условиях неопределенности, в [1] не приводится. Такая формулировка предложена в [5]: стоимость актива на дату оценки не превосходит ожидаемой суммы дисконтированных выгод от последующего использования актива в прогнозном периоде (включая стоимость актива в конце периода) и совпадает с этой суммой при наиболее эффективном использовании актива.

Отсюда вытекают два важных вывода:

- стоимость машины существенно зависит от того, как в процессе эксплуатации меняются ее производительность и операционные затраты;
- оценка стоимости машины предполагает оптимизацию ее использования по критерию максимума суммы дисконтированных выгод.

Допустим теперь, что машина используется наиболее эффективно и на протяжении всего срока службы этой машины, составляющего T лет, имеет неизменные характеристики производительность W и операционные затрат C в единицу времени. Тогда для нее ИВ в течение T лет будет постоянной и составит $Z=pW-C$. Будем предполагать также, что по окончании срока службы машина выбывает из эксплуатации (утилизируется), принося нулевые выгоды¹ (т.е. доходы от утилизации совпадают с расходами).

Тогда в соответствии с принципом ожидания выгод стоимость машины V будет равна сумме дисконтированных выгод от ее использования:

$$V = \int_0^T Ze^{-rt} dt = Z \frac{1-e^{-rT}}{r} = (pW - C)m(T; r), \quad (1)$$

где r — доналоговая непрерывная ставка дисконтирования (1/год), а $m(T; r)$ — мультипликатор постоянного дохода, определяемый формулой:

$$m(T; r) = \int_0^T e^{-rt} dt = \frac{1-e^{-rT}}{r}. \quad (2)$$

Если бы стоимость p была известна, оценить машину можно было бы по формуле (1). Но, как было отмечено, обычно стоимость производимого продукта оценщикам неизвестна. Чтобы выйти из положения, рассмотрим обращающуюся на рынке машину-аналог, производящую тот же продукт. Напишем для этой машины равенство (1), отмечая при этом характеристики аналога индексом «а»:

$$V_a = (pW_a - C_a)m(T_a; r). \quad (3)$$

Учтем теперь, что на дату оценки машины-аналога продаются на рынке². Поэтому оценщик может получить информацию о ценах сделок с

ними, и на этой основе оценить их рыночную стоимость V_a . А тогда из формулы (3) можно найти неизвестную стоимость единицы продукта:

$$p = \frac{V_a + C_a m(T_a; r)}{W_a m(T_a; r)}. \quad (4)$$

Как видим, стоимость единицы продукта (p) оказалась равной отношению дисконтированных единовременных и текущих затрат на производство продукта за весь срок службы аналога к дисконтированному объему выпуска этого продукта (удельным дисконтированным затратам на производство продукта). Это утверждение, по сути, было доказано еще в [8, раздел 10.4.2] и оно полностью соответствует требованиям затратного подхода к оценке [1;5].

Подставив (4) в формулу (1), мы получим:

$$V = V_a \cdot \frac{W}{W_a} \cdot \frac{m(T; r)}{m(T_a; r)} + \left[C_a \frac{W}{W_a} - C \right] \cdot m(T; r). \quad (5)$$

Эта формула (в несколько иной форме и для дискретного времени) была предложена Д.С. Львовым в его докторской диссертации и книге [9]. В таком виде она широко использовалась в СССР при оценке эффективности новой техники, изобретений и рационализаторских предложений, а также при установлении цен на новую промышленную продукцию.

Как видно из (5), машину можно оценить, корректируя стоимость аналога с учетом его отличий по производительности, операционным затратам и сроку службы, что полностью соответствует сравнительному подходу к оценке. В [5;10] показано, что равенство (5) справедливо и в условиях инфляции, если в качестве r принимать реальную (скорректированную с учетом инфляции) доналоговую непрерывную ставку дисконтирования.

Укажем два существенных недостатка формулы Львова.

1. Машин, не меняющих своих технико-экономических показателей в процессе эксплуатации, просто не существует³. Обычно в процессе эксплуатации машины наблюдается ухудшение ее технико-экономических характеристик (де-

³ В англоязычной литературе объекты с заданным сроком службы, в течение которого их потребительские свойства не меняются, именуются "one-hoss shay". Название заимствовано из поэмы Оливера Холмса «The Deacon's Masterpiece or The Wonderful «One-hoss Shay»: A Logical Story» (в ней речь шла об одноконном экипаже, созданным так, чтобы он 100 лет оставался исправным, а по истечении этого срока, день в день, развалился на мелкие кусочки). Подходящим русскоязычным аналогом, вероятно, является карета, в которой Золушка ехала на бал. Казалось бы, другими примерами могли бы быть цветик-семицветик, шагреновая кожа или электрическая лампочка, однако срок их службы не определен каким-то количеством лет.

¹ Обычно выгоды от утилизации машин достаточно малы.

² Новые машины (а речь идет только о новых, а не подержанных машинах) обычно продаются производителями или дилерами.

градация) производительность машины снижается, а операционные затраты растут (обзор сведений о динамике этих показателей для некоторых машин приводится в [5;10]). Соответственно снижаются и приносимые машиной в единицу времени выгоды.

2. Срок службы машины предполагается известным. Между тем, у идентичных машин, работающих в одинаковых условиях, сроки службы, как правило, различаются. В теории надежности сроки службы машин рассматриваются как случайные.

Далее мы постараемся учесть эти недостатки, внося в формулу Львова соответствующие коррективы. При этом условимся, что буквами Z , W , C далее будут обозначаться соответствующие характеристики только новой машины.

2. Деградация и срок службы машины

Ухудшение технико-экономических характеристик машины в процессе их эксплуатации технические специалисты именуют изнашиванием, износом или деградацией (*deterioration, degradation*). Мы будем рассматривать машину как единое целое (а не совокупность отдельных элементов, каждый из которых деградирует по-своему). Если считать процесс деградации машин детерминированным, учет его влияния на стоимость машин не представляет особых сложностей. Соответствующие модели, где срок службы машин экзогенно задается, изложены, например, в [4;7;11].

В [12] нами предложено обобщение формулы Львова, основанное на одной из таких моделей. В этой модели производительность и операционные затраты машины линейно зависят от возраста. Соответственно линейно снижается и интенсивность приносимых машиной выгод. Поэтому, если у новой машины $ИВ=Z$, а срок ее службы T лет, то в возрасте t лет ИВ составит $Z(1-t/T)$. Но тогда, в соответствии с принципом ожидания выгод, стоимость новой машины составит:

$$V = \int_0^T Z \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-rt} dt = Z \frac{rT + e^{-rT} - 1}{r^2} = (pW - C)m_l(T;r),$$

где $m_l(T;r)$ – мультипликатор линейно убывающего дохода, определяемый формулой:

$$m_l(T;r) = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-rt} dt = \frac{rT + e^{-rT} - 1}{r^2}. \quad (6)$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и при выводе формулы Львова, а окончательная формула принимает тот же вид (5), в которой мультипликаторы m заменены на m_l . Таким образом, учет детерминированной «линейной дегра-

дации» приводит лишь к изменению расчетной формулы для входящего в формулу Львова мультипликатора.

Между тем, процесс деградации машин (и иных технических систем) имеет вероятностный характер. Моделированию таких процессов посвящено огромное количество публикаций, например, [13;14;15;16]. Основное внимание в них уделялось влиянию деградации на надежность машины, статистическому моделированию процесса и оптимизации эксплуатационных параметров (например, периодичности ремонтов и замен элементов). Однако при этом принималось, что в ходе эксплуатации машины меняется только интенсивность отказов, но не производительность машины или операционные затраты. Соответственно, критерии оптимизации носили затратный характер (скажем, средние затраты на эксплуатацию и ремонт за единицу времени), а применить соответствующие модели для стоимостной оценки реальных машин оказалось невозможным. Одна из моделей, количественно учитывающих и надежность и деградацию машин при их стоимостной оценке, была предложена нами в [17].

Поскольку при деградации машины ИВ не возрастает, случайный процесс ее изменения имеет неотрицательные приращения. В теории вероятностей такие случайные процессы именуются субординаторами. С этих позиций представляется актуальной разработка и исследование моделей стоимостной оценки машин, деградация которых описывается субординаторами. Ниже предлагается одна из моделей такого рода.

Отметим, что в случае, когда процесс деградации детерминированный или описывается субординатором, ИВ с возрастом не возрастает. Но тогда наиболее эффективным будет использовать машину до тех пор, пока она не станет приносить отрицательные выгоды. Такой срок в стандартах оценки [1], в Международных стандартах финансовой отчетности [18] и оценочной литературе именуют экономическим (или сроком экономической службы). Теоретические законы распределения таких сроков рассматривались, например, в [19;20;21]. А вот о распределении фактических сроков службы (или ресурсов) машин известно не очень много: для этого надо было бы вести наблюдение за машинами в течение всего срока их службы или хотя бы вести учет возрастного состава выбывающих из эксплуатации машин. Для некоторых марок машин распределение фактических сроков службы или некоторые его характеристики можно попытаться «восстановить». В этих целях можно использовать:

- амортизационные сроки службы;

- нормативные, назначенные или гарантийные сроки службы (ресурсы), установленные в технической документации;
- публикуемые данные ускоренных испытаний машин на долговечность, либо полученные на их основе значения гамма-процентных ресурсов;
- предложения о продаже «в лом» подержанных машин;
- данные проводимых Росстатом РФ выборочных обследований сроков службы и возраста основных фондов.

Ряд рекомендаций по определению средних сроков службы машин на основе соответствующих амортизационных, нормативных или назначенных сроков дается в справочнике [22]. Специальных испытаний для установления вероятностных распределений сроков службы машин не проводят, а имеющиеся данные о сроках службы обычно аппроксимируют одним из известных распределений, например, гамма-распределением или распределением Вейбулла [21;23]. Сведения о коэффициентах вариации сроков службы машин были в свое время приведены в [23, табл.1-2 Приложения 3]. Впоследствии эти данные были повторены в [21]. В [24;25] параметры распределения срока службы подбирают в соответствии со средним значением и коэффициентом вариации срока службы оцениваемой машины. В то же время многие исследователи оценивают параметры распределения срока службы по результатам испытаний – сводка соответствующих результатов есть в [26]. При этом для большинства видов машин коэффициенты вариации срока службы оказываются лежащими в пределах от 0.3 до 0.7.

3. Пуассоновская модель процесса деградации машин

Будем характеризовать состояние машины интенсивностью приносимых ею выгод (ИВ), которую будем обозначать через z . Если на дату оценки у машины ИВ= z , то за малое время dt она принесет выгоды в размере zdt .

Будем считать, что машина не проходит дорогостоящих капитальных ремонтов, улучшающих ее состояние. Процесс деградации машины мы связываем с потоком случайных скрытых отказов, приводящих к случайным последствиям, и описываем следующим сложным пуассоновским процессом.

В процессе эксплуатации проводятся технические обслуживания и текущие ремонты (ТОиР) машины, которые позволяют, по возможности,

поддерживать состояние машины. Поскольку, по предположению, инфляция отсутствует, то ИВ машины при этом не меняется. Время от времени с интенсивностью 1 происходят случайные отказы. Их можно вообще не заметить (так называемые скрытые отказы) или частично устранить их последствия при текущем ремонте, однако и в том и в другом случае эксплуатационные характеристики машины ухудшаются (в том числе в связи с ростом затрат на ТОиР). Принимается, что после отказа ИВ уменьшается на неотрицательную случайную величину ξ , не зависящую от истории эксплуатации машины и имеющую функцию распределения $\mathbf{P}\{\xi \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}$ и плотность $\alpha e^{-\alpha x}$, где α – некоторый положительный параметр. При этом среднее уменьшение ИВ в единицу времени в данной модели будет постоянной величиной $1/\alpha$. Машина, у которой ИВ после отказа осталась неотрицательной, продолжает работать. Такой отказ назовем поломкой. Эксплуатация машины, у которой после отказа ИВ стала отрицательной, нецелесообразна. Принимается, что через непродолжительное время она утилизируется, принося, как мы ранее условились, нулевые выгоды. Подобный отказ назовем фатальным (отказы, после которых машину физически невозможно или экономически нецелесообразно использовать по назначению, в теории надежности именуют ресурсными).

Стоимость машины на дату оценки определяется ее состоянием (z), что позволяет считать ее некоторой функцией от этой одной переменной $V(z)$. Технические и экономические соображения показывают, что эта функция должна быть непрерывной и убывающей, а при $z=0$ – обращаться в нуль. Найдем явное выражение для этой функции.

Для этого рассмотрим машину, находящуюся в состоянии $z > 0$ на дату оценки, и выясним, как изменится ее стоимость за малое время dt .

Если за это время она не откажет, то останется в том же состоянии и будет иметь ту же стоимость $V(z)$. Если же произойдет отказ (вероятность этого ldt), то через время dt ИВ примет новое случайное значение $u = z - \xi$, распределенное на луче $(-\infty, z)$ с плотностью $\alpha e^{\alpha(u-z)}$. При $u < 0$ машина должна утилизироваться (фатальный отказ), принеся нулевые выгоды. В противном же случае машина за время dt принесет (доналоговые) выгоды в сумме zdt , и, поскольку инфляция отсутствует, ее стоимость окажется такой же, как и стоимость машины в состоянии на дату оценки, т.е. $V(u)$. Применим принцип ожидания выгод к нашей машине и малому периоду времени dt после даты оценки. Обозначив через r доналоговую ставку дисконтирования, мы получим:

$$V(z) = zdt + (1 - rdt) \left[(1 - \lambda dt)V(z) + \lambda dt \int_0^z \alpha e^{\alpha(u-z)} V(u) du \right]. \quad (7)$$

Отсюда, с точностью до малых более высоко-го порядка, находим:

$$0 = -V(z) + zdt + [1 - (r + \lambda)dt]V(z) + \lambda \alpha e^{-\alpha z} dt \int_0^z e^{\alpha u} V(u) du =$$

$$= e^{-\alpha z} dt \left\{ z e^{\alpha z} - (r + \lambda)V(z) e^{\alpha z} + \lambda \alpha \int_0^z e^{\alpha u} V(u) du \right\}.$$

Поэтому

$$z e^{\alpha z} - (r + \lambda)V(z) e^{\alpha z} + \lambda \alpha \int_0^z e^{\alpha u} V(u) du = 0. \quad (8)$$

По непрерывности, это равенство будет справедливым и при $z=0$, а тогда $V(0) = 0$. Дифференцируя равенство (8) по z и умножая на $e^{-\alpha z}$, имеем: $1 + \alpha z - r\alpha V(z) - (r + \lambda)V'(z) = 0$. Решая это уравнение при условии $V(0) = 0$, получим окончательно:

$$V(z) = \frac{z}{r} - \frac{\lambda}{\alpha r^2} \left[1 - e^{-\frac{r\alpha z}{r+\lambda}} \right]. \quad (9)$$

Отметим, что $V(z) \approx z/(r + \lambda)$ при малых z , и $V(z) \approx z/r - \lambda/(\alpha r^2)$ при больших z . Интересно, что стоимость z/r имела бы машина, постоянно дающая выгоды с неизменной интенсивностью z . Поэтому поправка $\lambda/(\alpha r^2)$ в последней формуле приближенно отражает частоту отказов и масштаб их последствий.

4. Остаточный срок службы машины

Обозначим через $\tau(z)$ случайный остаточный срок службы машины, у которой ИВ= z на дату оценки. Очевидно, что $\tau(z)=0$ при $z<0$. Вероятностное распределение случайной величины $\tau(z)$ однозначно определяется производящей функцией ее моментов $\varphi(p, z) = \mathbf{E}[e^{p\tau(z)}]$. Чтобы найти эту функцию, повторим те же рассуждения, что и в разделе 4.

Посмотрим, что произойдет за малое время dt с машиной, находящейся в состоянии $z>0$ на дату оценки. Если она не откажет, то останется в том же состоянии, но остаточный (от даты оценки) срок ее службы увеличится на dt . Однако с вероятностью λdt может произойти отказ. Тогда ИВ машины примет новое случайное значение $u=z-\xi$. Ему будут отвечать и новый остаточный срок службы, равный $\tau(u)$ при $u>0$ или нулю при $u<0$. Отсюда вытекает, что:

$$\varphi(p, z) = \mathbf{E}[e^{p\tau(z)}] = \mathbf{E} \left[(1 - \lambda dt) e^{p[\tau(z)+dt]} + \lambda dt \int_0^z \alpha e^{\alpha(u-z)} e^{p\tau(u)} du + \lambda e^{-\alpha z} dt \right] =$$

$$= (1 - \lambda dt)(1 + p dt) \mathbf{E}[e^{p\tau(z)}] + \lambda \alpha e^{-\alpha z} dt \int_0^z e^{\alpha u} \mathbf{E}[e^{p\tau(u)}] du + \lambda e^{-\alpha z} dt =$$

$$= \varphi(p, z) + e^{-\alpha z} dt \left\{ (p - \lambda) e^{\alpha z} \varphi(p, z) + \lambda \alpha \int_0^z e^{\alpha u} \varphi(p, u) du + \lambda \right\}.$$

Но такое равенство возможно только если

$$(p - \lambda) e^{\alpha z} \varphi(p, z) + \lambda \alpha \int_0^z e^{\alpha u} \varphi(p, u) du + \lambda = 0. \quad (10)$$

По непрерывности, это равенство будет справедливо и при $z = 0$, если только понимать $\varphi(p, 0)$ как предел $\varphi(p, z)$ при $z \rightarrow 0$. А тогда

$$\varphi(p, 0) = \frac{\lambda}{\lambda - p}.$$

Если продифференцировать равенство (10) по z и умножить на $e^{-\alpha z}$, мы получим: $(p - \lambda)\varphi'(p, z) + p\alpha\varphi(p, z) = 0$. Решением этого уравнения будет:

$$\varphi(p, z) = \varphi(p, 0) e^{\frac{p\alpha z}{\lambda - p}} = \frac{\lambda}{\lambda - p} e^{\frac{p\alpha z}{\lambda - p}}. \quad (11)$$

Теперь среднее значение $T(z)$, дисперсию $D(z)$ и коэффициент вариации $v(z)$ случайного срока службы машины можно определить по известным формулам:

$$T(z) = \mathbf{E}[\tau(z)] = \varphi'_p(0, z) = \frac{1 + \alpha z}{\lambda};$$

$$\mathbf{E}[\tau^2(z)] = \varphi''_{pp}(0, z) = \frac{2 + 4\alpha z + \alpha^2 z^2}{\lambda^2}; \quad (12)$$

$$D(z) = \mathbf{E}[\tau^2(z)] - T^2(z) = \frac{1 + 2\alpha z}{\lambda^2};$$

$$v(z) = \frac{\sqrt{D[\tau(z)]}}{T(z)} = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha z}}{1 + \alpha z}. \quad (13)$$

5. Обобщенная формула Львова

Рассмотрим машины некоторой марки, деградация которых описывается изложенной выше пуассоновской моделью. Допустим, что о новой машине этой марки нам известны производительность W , операционные затрат C в единицу времени, средний срок службы T и коэффициент вариации срока службы v . Предположим временно, что мы знаем и стоимость единицы производимого машиной продукта p . Тогда мы знаем и интенсивность выгод, приносимых машиной в начале эксплуатации $Z = pW - C$. Учтем теперь, что

$$v = \frac{\sqrt{1+2\alpha Z}}{1+\alpha Z}, \quad T = \frac{1+\alpha Z}{\lambda} \quad \text{в силу (13) и (12).}$$

Отсюда можно найти вначале величину $\beta = \alpha Z$, а затем параметры α и λ :

$$\beta = \frac{1-v^2 + \sqrt{1-v^2}}{v^2}; \quad \alpha = \frac{\beta}{Z}; \quad \lambda = \frac{1+\beta}{T}. \quad (14)$$

Подставляя это в (9), после простых преобразований получим следующее выражение для стоимости новой машины $V=V(Z)$:

$$V = Zm(T; v; r) = (pW - C)m(T; v; r), \quad (15)$$

где мультипликатор m задается формулой

$$m(T; v; r) = \frac{1}{r} - \frac{1+\beta}{\beta T r^2} \left[1 - e^{-\frac{rT\beta}{rT+1+\beta}} \right], \quad (16)$$

а β определяется первой из формул (14).

Детерминированной ситуации отвечает $v=0$, $\beta=\infty$. Нетрудно убедиться, что при $\beta \rightarrow \infty$ мультипликатор $m(T; v; r)$ имеет предел мультипликатор линейно убывающего дохода, определяемый формулой (6): $\lim_{\beta \rightarrow \infty} m(T; v; r) = m_l(T; r)$.

На рис. 1 представлены зависимости $m(T; v; r)$ от T для $r = 0.1$ и разных v , на рис. 2 зависимости $m(T; v; r)$ от r для разных T и v . Отметим, кстати, что с увеличением коэффициента вариации срока службы v значение $m(T; v; r)$ растет. Поэтому, в силу (15), рост неопределенности срока службы повышает стоимость машины, хотя, по мнению оценщиков, должно быть наоборот.

Дальнейшие рассуждения проходят так же, как и при выводе формулы Львова в разделе 2. Поскольку на самом деле стоимость производимого продукта p нам неизвестна, определим ее, по данным об обращающейся на рынке аналогичной машине, производящей тот же продукт.

Для этого напишем формулу (15) для машины-аналога, отмечая его характеристики индексом «а»: $V_a = (pW_a - C_a)m(T_a; v_a; r)$. Исключая отсюда p и подставляя его в (15), получим следующее обобщение формулы Львова для рассматриваемой ситуации:

$$V = V_a \cdot \frac{W}{W_a} \cdot \frac{m(T; v; r)}{m(T_a; v_a; r)} + \left[C_a \frac{W}{W_a} - C \right] \cdot m(T; v; r). \quad (17)$$

Как видим, и при случайном сроке службы машин вид формулы сохранился, изменилось лишь выражение для мультипликатора дохода.

Пример. Производительность машины на 25% больше, чем у аналога. Стоимость аналога – 10 млн. руб. Операционные затраты машины и аналога составляют соответственно 80 и 69 млн.

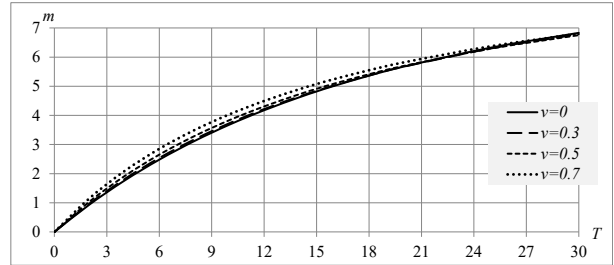


Рис. 1. Зависимости мультипликатора m от среднего срока службы (T) для $r = 0.1$ и разных v .

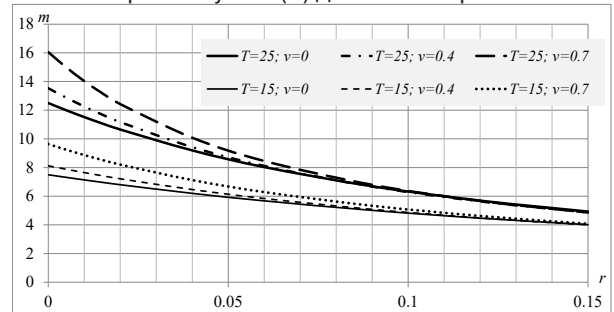


Рис. 2. Зависимости мультипликатора m от ставки дисконтирования (r) для разных средних значений (T) и коэффициентов вариации (v) срока службы.

руб./год, нормативные сроки их службы – 7 и 10 лет. Машина и аналог являются серийным оборудованием широкого профиля. Согласно [22], средний срок службы такого оборудования будет в 1.84 раза больше назначенного срока. В данном случае средние сроки службы машины и аналога составят соответственно 12.88 и 18.4 года. Коэффициент вариации срока службы для обеих машин с учетом рекомендаций [21] примем равным 0.45, ставку дисконтирования – 0.08. Расчеты по формулам (12) и (14) дают: $m(12.88; 0.45; 0.08) = 4.846$, $m(18.4; 0.45; 0.08) = 6.045$. В таком случае стоимость машины будет равна:

$$V = 10 \cdot 1.25 \cdot \frac{4.846}{6.045} + [69 \cdot 1.25 - 80] \cdot 4.846 = 40.31 \text{ млн. руб.}$$

Отметим, что при детерминированном сроке службы ($v=0$) стоимость была бы немного больше: $V=39.22$ млн. руб. А вот расчет по «обычной» формуле Львова, т.е. с использованием формулы (2) и средних сроков службы обеих машин даст в полтора раза большую стоимость: $V=60.7$ млн. руб. ■

Прием, использованный в данной статье, может быть использован и для получения обобщенных формул Львова для ситуаций, когда процесс деградации машин описывается другими моделями. Укажем лишь одну из таких ситуаций.

В нашей модели вероятность фатального отказа машины росла с ухудшением ее состояния. Между тем, интенсивность некоторых типов фатальных отказов от состояния машины не зависит. Примерами являются разрушения машин при ДТП или стихийных бедствиях. Чтобы учесть такого типа отказы в нашей модели, достаточно принять, что наряду с описанным в разделе 3 потоком отказов, имеет место другой, независимый простой пуассоновский поток фатальных отказов с постоянной интенсивностью μ . Легко видеть, что тогда уравнение (7) с точностью до малых более высокого порядка примет вид:

$$V(z) = zdt + (1 - rdt) \left[(1 - \mu dt)(1 - \lambda dt)V(z) + \lambda dt \int_0^{\bar{z}} \alpha e^{\alpha(u-z)} V(u) du \right] = \\ = zdt + [1 - (r + \mu)dt] \left[(1 - \lambda dt)V(z) + \lambda dt \int_0^{\bar{z}} \alpha e^{\alpha(u-z)} V(u) du \right].$$

Как видим, наличие фатальных отказов указанного типа может быть учтено (обычным для инвестиционно-финансовых расчетов) путем добавления к ставке дисконтирования r «премии за риск», равной интенсивности таких отказов μ . Все последующие формулы при этом остаются без изменения.

В то же время учет иначе устроенных потоков отказов и других, более адекватных моделей деградации машин, рассматриваемых в литературе по теории надежности, требует дальнейших исследований.

Литература

- Международные стандарты оценки : вступают в силу 31 января 2020 года / пер. с англ. М.: Российское общество оценщиков. 2020. 193 с.
- Федеральный закон от 29.07.1998 № 135-ФЗ (ред. от 18.03.2020) «Об оценочной деятельности в Российской Федерации»
- Асаул А.Н., Старинский В.Н., Бездудная А.Г., Старовойтов М.К. Оценка собственности. Оценка машин, оборудования и транспортных средств. СПб.: АНО «ИПЭВ». 2011. 287 с.
- Оценка машин и оборудования: Учебник / М.А. Федотова и др. 2-е изд. М.: ИНФРА-М. 2018. 324 с.
- Смоляк С.А. Стоимостная оценка машин и оборудования (секреты метода ДДП). Под ред. д.э.н. Козыря Ю.В. М.: Издательский дом «Опцион». 2016. 377 с.
- Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР. 1960.
- Лившиц В.Н. Выбор оптимальных решений в технико-экономических расчетах. М.: Экономика. 1971. 255 с.
- Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика. 5-е изд. М.: Поли Принт Сервис. 2015. 1300 с.
- Львов Д.С. Экономические проблемы повышения качества промышленной продукции. М.: Наука, 1969. 264 с.
- Смоляк С.А. Проблемы и парадоксы оценки машин и оборудования. М.: РИО МАОК, 2008. 305 с.
- Smolyak S.A. Models for estimating depreciation in plants, machinery, and equipment: Analysis and proposals // Journal of Property Tax Assessment & Administration. 2012. Vol. 9, Issue 3, pp. 4786.
- Смоляк С.А. О формуле Д.С. Львова для оценки машин // Имущественные отношения в Российской Федерации. 2018. № 9(204). С. 19-25.
- Li W., Pham H. Reliability modeling of multi-state degraded systems with multi-competing failures and random shocks. *IEEE Transactions on Reliability*. 2005. Vol. 54(2), pp. 297-303
- Nakagawa T. Shock and damage models in reliability theory. Springer. 2007.
- Wang Z., Huang H.-Z., Li Y., Xiao N.-C. An approach to reliability assessment under degradation and shock process. // *IEEE Transactions on Reliability*. 2011. Vol. 60(4), pp. 852-863.
- Lin Y.H., Li Y.F., Zio E. Integrating Random Shocks Into Multi-State Physics Models of Degradation Processes for Component Reliability Assessment // *IEEE Transactions on Reliability*. 2014. Vol. 64(1), pp. 154-166.
- Смоляк С.А. Зависимость стоимости машин от возраста: проблемы и модели // Аудит и финансовый анализ. 2014. № 5. С. 138-150.
- Международный стандарт финансовой отчетности (IAS) 16 «Основные средства».
- Bekker P.C.F. A lifetime distribution model of depreciable and reproducible capital assets. VU University Press. Amsterdam. 1991. 280 p.
- Erumban A.A. Lifetimes of machinery and equipment evidence from Dutch manufacturing // *Review of Income and Wealth*. 2008. Vol. 54. # 2, pp. 237-268.
- Острейковский В.А. Теория надежности: Учебник для вузов. М.: Высшая школа. 2003.
- Лейфер Л.А. (Ред.). Справочник оценщика машин и оборудования. Корректирующие коэффициенты и характеристики рынка машин и оборудования (изд. 2-е). Нижний Новгород: Приволжский центр методического и информационного обеспечения оценки. 2019.
- Надежность изделий химического машино-

- строения. Оценка надежности и эффективности при проектировании: РД 26-01-143-83.
24. Лейфер Л.А., Кашникова П.М. Определение остаточного срока службы машин и оборудования на основе вероятностных моделей // Имущественные отношения в Российской Федерации. 2008. № 1 (76). С. 66-79.
 25. Смоляк С.А. О динамике обесценения машин со случайным сроком службы // Труды Института системного анализа РАН. 2020. № 1. С. 55-64.
 26. Смоляк С.А. О вероятностных моделях для оценки остаточного срока службы и износа машин и оборудования // Имущественные отношения в Российской Федерации. 2017. № 2 (185). С. 75-87.

Сергей Александрович Смоляк. Федеральное государственное бюджетное учреждение «Центральный экономико-математический институт РАН». 117418, Москва, Нахимовский проспект, 47. Главный научный сотрудник. Доктор экономических наук. Количество печатных работ: 308. Область научных интересов: микроэкономика, инвестиционные проекты, стоимостная оценка имущества, прикладная статистика. E-mail: smolyak1@yandex.ru

The generalized Lvov formula for equipment under degradation

S.A. Smolyak¹

¹Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences

Abstract. For the valuation of machinery and equipment, the Lvov formula is sometimes used. This formula allows us to calculate the market value of machinery item based on the market value of its analogue, taking into account the differences in their productivity, operating costs and service lives. However, this formula is based on the assumption that the productivity and operating costs of machinery items do not change over their service lives. We propose a generalization of this formula to a more realistic situation where the use of machinery items is described by a random degradation process.

Keywords: *machinery, equipment, degradation, random process, valuation, service life, market value, cash flow discounting*

DOI: 10.14357/20790279200301

References

1. International Valuation Standards. Effective 31 January 2020 / International Valuation Standards Council.
2. Federalny zakon ot 29.07.1998 No 135-FZ (redaktsiya ot 18.03.2020) "Ob otsenочноy deyatel'nosti v Rossiyskoy Federatsii" [Federal Law of 29.07.1998 No. 135-FZ (as amended on 18.03.2020) "On appraisal activities in the Russian Federation"]
3. Asaul, A.N., Starinsky, V.N., Bezudnaya, A.G., Starovoyov, M.K. 2011. Otsenka sobstvennosti. Otsenka mashin, oborudovaniya i transportnykh sredstv. [Property valuation. Machinery, equipment and vehicles valuation]. St Peterburg, Russia: IPEV Publ. (in Russian)
4. Fedotova, M.A. (Ed.). 2018. Otsenka mashin i oborudovaniya : Uchebnik [Machinery and equipment valuation: Textbook]. 2nd ed. Moscow, Russia: INFRA-M Publ. (in Russian)
5. Smolyak, S.A. 2016. Stoimostnaya otsenka mashin i oborudovaniya (sekrety metoda DDP). [Machinery and equipment valuation (secrets of the DCF method)]. Moscow, Russia: Option Publ. (in Russian)
6. Cantorovich, L.V. 1960. Ekonomichesky raschyot nailuchshego ispolzovaniya resursov [Economic calculation of the best use of resources]. Moscow, USSR: Academy of Sciences of the USSR Publ. (in Russian)
7. Livchits, V.N. 1971. Vybór optimalnykh resheniy v tekhniko-tconomicheskikh raschyotakh [The choice of optimal solutions in technical and economic calculations]. Moscow, Russia: Ekonomika Publ. (in Russian)
8. Vilensky, P.L., Livchits, V.N., Smolyak, S.A. 2015. Otsenka effektivnosti investitsionnykh proyektov: Teoriya i praktika [Investment projects efficiency evaluation: Theory and practice]. 5nd ed. Moscow, Russia: Poly Print Service Publ. (in Russian)

9. Lvov, D.S. 1969. *Economicheskiye problemy povysheniya kachestva promyshlennoy produktsii* [Economic problems of improving the quality of industrial products]. Moscow: Nauka Publ. (in Russian)
10. Smolyak, S.A. 2008. *Problemy i paradoxy otsenki mashin i oborudovaniya* [Problems and paradoxes of machinery and equipment valuation]. Moscow, Russia: RIO MAOK Publ. (in Russian)
11. Smolyak, S.A. 2012. Models for estimating depreciation in plants, machinery and equipment: Analysis and proposals // *Journal of Property Tax Assessment & Administration*. Vol. 9, Issue 3: 4786.
12. Smolyak S.A. 2018. O formule D.S. Lvova dlya otsenki mashin [About the D.S. Lvov formula for machinery and equipment valuation] // *Imushchestvennye otnosheniya v Rossiyskoy Federatsii* [Property Relations in the Russian Federation]. 9(204): 19-25. (in Russian)
13. Li, W., Pham, H. 2005. Reliability modeling of multi-state degraded systems with multi-competing failures and random shocks. *IEEE Transactions on Reliability*. Vol. 54(2): 297-303
14. Nakagawa, T. 2007. *Shock and damage models in reliability theory*. Springer.
15. Wang, Z., Huang, H.-Z., Li, Y., Xiao, N.-C. 2011. An approach to reliability assessment under degradation and shock process. // *IEEE Transactions on Reliability*. Vol. 60(4): 852-863.
16. Lin, Y.H., Li, Y.F., Zio E. 2014. Integrating Random Shocks into Multi-State Physics Models of Degradation Processes for Component Reliability Assessment // *IEEE Transactions on Reliability*. Vol. 64(1): 154-166.
17. Smolyak, S.A. 2014. Zavisimost stoimosti masin ot vozrasta; problemy i modeli [Dependence of the value of machinery on age: problems and models] // *Audit i finansovy analiz* [Audit and financial analysis]. No 5: 138-150. (in Russian)
18. IAS 16 Property, Plant and Equipment.
19. Bekker, P.C.F. 1991. *A lifetime distribution model of depreciable and reproducible capital assets*. VU University Press. Amsterdam.
20. Erumban, A.A. 2008. Lifetimes of machinery and equipment evidence from Dutch manufacturing // *Review of Income and Wealth*. Vol. 54. # 2: 237-268.
21. Ostreykovsky, V.A. 2003. *Teoriya nadyozhnosti* [Reliability theory]: Textbook for high schools. Moscow, Russia: Vysshaya shkola Publ. (in Russian)
22. Leifer, L.A. (Ed.). 2019. *Spravochnik otsenshchika mashin i obotudovaniya*. *Correctiruyushchiye coefficienty i kharakteristiki rynka mashin i obotudovaniya*. [Reference book of the machinery and equipment appraiser. Correction factors and characteristics of the machinery and equipment market] 2nd ed. Nizhniy Novgorod. Volga center for methodological and information support of valuation.
23. Nadyozhnost' izdeliy khimicheskogo machinostoyeniya. Otsenka nadyozhnosti i effektivnosti pri proyektirovanii : RD [The reliability of chemical engineering products. Evaluation of reliability and efficiency in design : Guidance document] 26-01-143-83.
24. Leifer, L.A., Kashnikova, P.M. 2008. *Opredeleniye ostatocnogo sroka sluzhby mashin i oborudovaniya na osnove veroyatnostnykh modeley* [Calculation of the residual life of machinery and equipment based on probabilistic models]. *Imushchestvennye otnosheniya v Rossiyskoy Federatsii* [Property Relations in the Russian Federation]. 1: 66-79. (in Russian)
25. Smolyak, S.A. 2020. O dinamike obestseneniya mashin so sluchaynym srokom sluzhby [On the dynamics of depreciation of machines with a random service life] // *Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossiyskoy Akademii nauk* [Proceedings of the Institute of Systems Analysis of the Russian Academy of Sciences]. 1(66): 55-64. (in Russian)
26. Smolyak, S.A. 2017. O veroyatnostnykh modelyakh dla otsenki ostatocnogo sroka sluzhby i iznosa mashin i oborudovaniya [On probabilistic models for machinery and equipment residual life and depreciation estimation]. *Imushchestvennye otnosheniya v Rossiyskoy Federatsii* [Property Relations in the Russian Federation]. 2(185) : 75-87. (in Russian)

S.A. Smolyak. Doctor of Economic Sciences. Federal State Budgetary Institution «Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences». 47, Nakhimovsky prospect, 117418, Moscow, Russia. E-mail: smolyak1@yandex.ru